

آزمون جامع «۱»

۱. گزینه‌ی (۴)

به کمک انتقال محورهای مختصات، تابع و معکوس آن را انتقال می‌دهیم.

$$\frac{y-1}{Y} = -\frac{(x+1)}{X} \stackrel{\text{تابع معکوس}}{\rightarrow} Y = -X^3 \rightarrow Y = -\sqrt[3]{X}$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقي}} -X^3 = -\sqrt[3]{X} \xrightarrow{\text{توان ۳}} X^3 = X \Rightarrow X(X^3 - 1) = 0$$

سه نقطه

$\Rightarrow X = 0, 1, -1 \rightarrow$

۹. گزینه‌ی (۴)

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 3 \\ g^{-1} \circ f^{-1} = \frac{x-1}{6} \\ y = 2x + 3 \rightarrow x = \frac{y-3}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2} \\ g^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{x-1}{6} \rightarrow f^{-1}(x) = g\left(\frac{x-1}{6}\right) \\ \rightarrow g\left(\frac{x-1}{6}\right) = \frac{x-3}{2} \rightarrow \end{cases}$$

$$g(t) < \frac{\varepsilon t + 1 - 3}{2} \xrightarrow{\text{با تغییر متغیر}} \frac{x-1}{6} = t \rightarrow x = \varepsilon t + 1 \rightarrow g(t) = 3t - 1$$

۱۰. گزینه‌ی (۱)

$$y = \log_e^x - \log_e^{1+x} \rightarrow y = \log_e \frac{x}{1+x}$$

$$\rightarrow \frac{x}{1+x} = e^y \rightarrow x = e^y + xe^y$$

$$\rightarrow x(1-e^y) = e^y \rightarrow x = \frac{e^y}{1-e^y} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$$

۱۱. گزینه‌ی (۱)

معکوس پذیر است \leftarrow یک به یک است.

$$\begin{cases} (4, 4), (k, 1), (\underbrace{2, 1}), (\underbrace{2, m}) \\ \rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 1 \end{cases} \end{cases}$$

۱۲. گزینه‌ی (۱)

$$f(x) = \delta + 1 \cdot x^{-1} \rightarrow y - \delta = 1 \cdot x^{-1}$$

$$\rightarrow \log 1 \cdot x^{-1} = \log(y - \delta) \rightarrow (x-1) \log 1 \cdot 0 = \log(y - \delta)$$

$$x = \log(y - \delta) + 1 \rightarrow y = \log(x - \delta) + 1$$

۱۳. گزینه‌ی (۱)

$$h(x) = fog(x) = 3(2+x) - 2 = 3x + 4$$

$$y = 3x + 4 \rightarrow 3x = y - 4 \rightarrow x = \frac{y-4}{3}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-4}{3} = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

۱۴. گزینه‌ی (۴)

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{y} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

یعنی تابع و معکوس‌اش برهم منطبق‌اند پس بی‌شمار نقطه‌ی مشترک دارند.

۱. گزینه‌ی (۱)

$$f = \{(3, 2), (a, 5), (\underbrace{3, a^2 - a}), (\underbrace{b, 2}), (-1, 4)\}$$

$$\rightarrow a^2 - a = 2 \rightarrow \begin{cases} a = +2 & \checkmark \\ a = -1 & \text{غیر} \end{cases} \rightarrow (2, 3)$$

۲. گزینه‌ی (۱)

$$y = x^r - 4x \rightarrow y = (x-2)^r - 4$$

$$\rightarrow (x-2)^r = y + 4 \rightarrow x-2 = \pm \sqrt[r]{y+4}$$

$$\rightarrow x = 2 + \sqrt[r]{y+4} \quad x$$

$$x = 2 - \sqrt[r]{y+4} \quad \checkmark \quad x < 2 \quad \text{زیرا}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt[r]{x+4}$$

۳. گزینه‌ی (۲)

$$f(a) = 24 \rightarrow a^3 + 3a + 1 = 24 \rightarrow a^3 + 3a - 14 = 0 \rightarrow a = 2$$

$$f^{-1}(-4) = b \rightarrow f(b) = -4 \rightarrow b^3 + 3b + 1 = -4$$

$$\rightarrow b^3 + 3b + 1 = 0 \\ b = -2 \rightarrow b = -a$$

۴. گزینه‌ی (۳)

$$f(x) = x^r + 3x^r + 3x + 2$$

$$\rightarrow f(x) = (x+1)^r + 1 \rightarrow y-1 = (x+1)^r$$

$$\rightarrow x+1 = \sqrt[r]{y-1} \rightarrow x = \sqrt[r]{y-1} - 1$$

$$\rightarrow y = \sqrt[r]{x-1} - 1$$

۵. گزینه‌ی (۳)

$$f = \{(\underbrace{1, 2}), (a, 3), (\Delta, -1), (\underbrace{b, 2}), (\underbrace{\varepsilon, 3})\}$$

$$b = 1 \rightarrow a - b = \Delta$$

$$a = \varepsilon$$

۶. گزینه‌ی (۱)

$$f(x) = \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}}$$

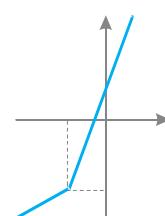
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right) \in f^{-1} \rightarrow \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in f$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \rightarrow a = 1$$

۷. گزینه‌ی (۱)

تابعی که از دو نیم خط با شیب غیر یکسان تشکیل شده باشد (شیبها صفر هم نباشند) تابع یک به یک است.

$$y = |x+2| + 4x = \begin{cases} 5x + 2 & x \geq -2 \\ 3x - 2 & x < -2 \end{cases}$$



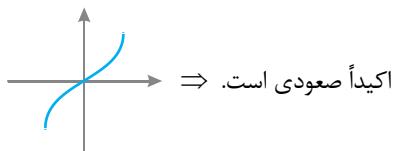
آزمون جامع «۲»

۱. گزینه‌ی (۲)

تابع در بازه‌ی $[-2, 1]$ هم صعودی و هم نزولی است و در $[1, 3]$ اکیداً صعودی است پس در بازه‌ی $[-2, 3]$ صعودی است.

۲. گزینه‌ی (۴)

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

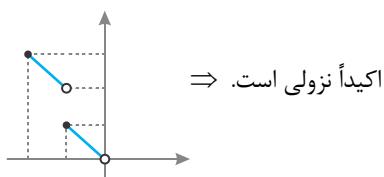


اکیداً صعودی است. \Rightarrow ۳. گزینه‌ی (۲)

$$f(x) = x[x] \quad x < 0$$

$$-1 \leq x < 0 \quad y = -x$$

$$-2 \leq x < -1 \quad y = -2x$$



اکیداً نزولی است. \Rightarrow ۴. گزینه‌ی (۲)

$$f(x) = ax^r + b$$

$$(1, 0) \in f \rightarrow a + b = 0 \rightarrow a = -b$$

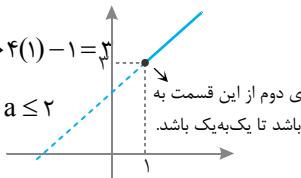
$$(1, 0) \in f^{-1} \rightarrow (0, 1) \in f \rightarrow b = 1 \rightarrow a = -1 \rightarrow a - b = -2$$

۵. گزینه‌ی (۴)

شرط معکوس‌پذیری، یک‌به‌یک بودن است.

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & x > 1 \\ x + a & x < 1 \end{cases}$$

$$x + a \xrightarrow{x=1} 1 + a \leq 2 \rightarrow a \leq 2$$



۶. گزینه‌ی (۳)

$$2a - 1 = a \rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow 3b^2 - 4a = 2 \rightarrow 3b^2 = 6 \rightarrow b^2 = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \sqrt{2} \rightarrow (b\sqrt{2}, 1) = (2, 1) \\ b = -\sqrt{2} \end{cases}$$

۷. گزینه‌ی (۴)

$$f = \{(2, 2), (-1, 2), (2, 1), (-2, -1)\}$$

$$f^{-1} = \{(2, 2), (2, -1), (1, 2), (-1, -2)\}$$

$$f + f^{-1} = \{(2, 2), (3, 2), (-1, 0)\}$$

۱۵. گزینه‌ی (۳)

طبق تعریف تابع اکیداً صعودی داریم:

$$x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$$

ابتدا تابع را تعریف می‌کنیم:

$$\Rightarrow f = \{(-1, \alpha), (0, \alpha^2 - 2), (1, 2\alpha + 1)\}$$

$$\begin{aligned} \alpha < \alpha^2 - 2 &\Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 > 0 \\ \Rightarrow \alpha < -1 \text{ یا } \alpha > 2 & \quad (1) \\ \alpha^2 - 2 < 2\alpha + 1 &\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 3 < 0 \\ \Rightarrow -1 < \alpha < 3 & \quad (2) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} -1 < \alpha < 2$$

۳ | فصل نهم | انواع تابع |

۱۴. گزینه‌ی (۱)

$$\begin{cases} y = x^3 + 4x - 4 \\ y = x \end{cases} \rightarrow x^3 + 4x - 4 = x$$

$$\rightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \rightarrow (x-1)(x^2+x+4) = 0$$

$$\rightarrow x = 1 \rightarrow y = 1 \rightarrow \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

۱۵. گزینه‌ی (۳)

$$f(x) = x^3 - x^2 + 5x$$

$$(a, b) \in f^{-1} \rightarrow (b, a) \in f$$

پس زوج‌های گزینه‌ها را برعکس کرده و امتحان می‌کنیم.

$$(14, 2) \in f^{-1} \rightarrow (2, 14) \in f \quad \checkmark$$

۸. گزینه‌ی (۱)

$$g(x) = 9 + 6 = 15$$

$$\rightarrow f^{-1}(15) = k \rightarrow f(k) = 15 \rightarrow \frac{4k - 3}{k + 2} = 15$$

$$4k - 3 = 15k + 30 \rightarrow 11k = -33 \rightarrow k = -3$$

۹. گزینه‌ی (۴)

$$y = \frac{x-2}{2x-1} \rightarrow 2xy - y = x - 2$$

$$2xy - x = y - 2 \rightarrow x = \frac{y-2}{2y-1} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-2}{2x-1}$$

۱۰. گزینه‌ی (۱)

$$y = x^3 - 4x - 3$$

روش مثال:

$$x \geq 2 \rightarrow (3, -6) \in f \rightarrow (-6, 3) \in f^{-1}$$

در گزینه‌ها امتحان می‌کنیم.

$$y = 2 + \sqrt{x+7} = 2 + \sqrt{-6+7} = 3 \quad \checkmark$$

گزینه‌ی (۱):

۱۱. گزینه‌ی (۱)

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x \leq -1 \\ 2a - 4x & x > -1 \end{cases}$$

برد دو تابع نباید هیچ اشتراکی باهم داشته باشند.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x \leq -1 \Rightarrow R_1 = [2, +\infty) \\ 2a - 4x & x > -1 \Rightarrow R_2 = (-\infty, 2a + 4) \end{cases}$$

برای آنکه برد دو تابع اشتراک نداشته باشند، می‌بایست:

$$2a + 4 \leq 2 \Rightarrow 2a \leq -2 \Rightarrow a \leq -1$$

۱۲. گزینه‌ی (۱)

$$f(x) = \frac{1-2x}{3x+4}$$

$$(a+4, a) \in f^{-1} \rightarrow (a, a+4) \in f$$

$$a+4 = \frac{1-2a}{3a+4} \rightarrow 3a^2 + 4a + 12a + 16 = 1 - 2a$$

$$3a^2 + 18a + 16 = 0 \rightarrow a^2 + 6a + 5 = 0$$

$$(a+1)(a+5) = 0 \rightarrow a = -1, -5$$

۱۳. گزینه‌ی (۴)

$$f(x) = x - \frac{1}{x} \quad f^{-1}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right) = k \rightarrow f(k) = \frac{\Delta}{\delta}$$

$$\left(k - \frac{1}{k} = \frac{\Delta}{\delta}\right) \cdot k \rightarrow \delta k^2 - \Delta = \Delta k$$

$$\rightarrow \delta k^2 - \Delta k - \Delta = 0 \rightarrow k = \frac{\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 4\Delta^2}}{2\Delta} = \frac{\Delta \pm \sqrt{5\Delta^2}}{2\Delta} = \frac{\Delta \pm \sqrt{5}\Delta}{2\Delta}$$

$$\begin{cases} k = \frac{1\Delta}{12} = \frac{3}{2} & \checkmark \\ k = -\frac{\Delta}{12} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$